ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΤΟΥ Α.Π.Θ.

Φανή Πεταλίδου

Λέκτορας Τμήματος Μαθηματικών

petalido@math.auth.gr

Ιανουάριος 2015

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Από τη μέχρι τώρα γνωριμία σας και επαφή σας με τα Μαθηματικά, μέσω της διδασκαλίας τους στη πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, έχετε σχηματίσει την άποψη ότι *Μαθηματικός είναι ο καθηγητής που ξέρει να κάνει πράξεις, να λύνει εξισώσεις (πρωτοβάθμιες, δευτεροβάθμιες, …), να γράφει τριγωνομετρικές ταυτότητες και να υπολογίζει ημίτονα και συνημίτονα γωνιών, να κάνει μελέτη συναρτήσεων μίας μεταβλητής και γραφικές παραστάσεις… ότι είναι ο καθηγητής που σας φέρνει σ' επαφή με τη Γεωμετρία του Ευκλείδη, που σας διδάσκει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, κλπ.*

Στο τέλος, τίθενται πάντοτε τα ερωτήματα:

«Και που τα χρειαζόμαστε όλα αυτά;»

«Γιατί να σπουδάσουμε Μαθηματικά; »

Σκοπός, λοιπόν, της παρουσίασής μας είναι:

- **Να δώσουμε μία απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα.**

Θα σας παρουσιάσουμε κάποια παραδείγματα για να δείτε και να πεισθείτε ότι τα Μαθηματικά, μία από τις αρχαιότερες επιστήμες, έχουν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη ***της Φυσικής, της Βιολογίας, της Ιατρικής, της Οικονομίας, των Τηλεπικοινωνιών, της Μετεωρολογίας, της Αρχαιολογίας, των Μεταφορών, και όλων σχεδόν των επιστημών!!!***

Τα τελευταία σαράντα χρόνια με τη βοήθεια των Μαθηματικών όλα λειτουργούν ***πιο γρήγορα, πιο αποτελεσματικά, πιο αποδοτικά!***

Σε μαθηματικές θεωρίες βασίζεται η λειτουργία ***των μηχανών αναζήτησης, π.χ. Google, των GPS, των κινητών τηλεφώνων και όλων των ηλεκτρονικών συσκευών!***

Μαθηματικά και Φυσική

Οι δεσμοί των Μαθηματικών με τη Φυσική είναι γνωστοί από την αρχαιότητα.

Η Αρχή του Αρχιμήδη

«Κάθε σώμα εμβυθιζόμενο σ' ένα υγρό δέχεται μία δύναμη-άνωση ίση με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει.»

περιγράφει ένα Φυσικό φαινόμενο με μία Μαθηματική γλώσσα!

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η Φυσική γνώρισε μεγάλη άνθηση χάρη στη δημιουργία του **Διαφορικού κι Ολοκληρωτικού Λογισμού** από τους **Newton** (Άγγλος Μαθηματικός) και **Leibniz** (Γερμανός Μαθηματικός) κατά τον $17^{ο}$ αιώνα.

Ακόμη, χάρη στη συμβολή του Γάλλου Μαθηματικού Fourier, που απέδειξε ότι

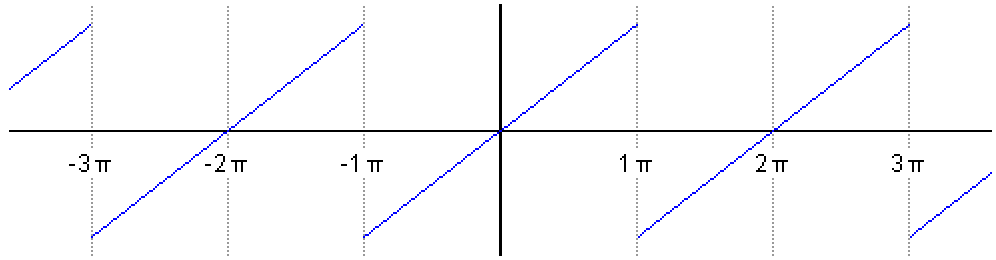
«Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άπειρο άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων»

(των γνωστών σας *ημίτονο* και *συνημίτονο*) μπόρεσαν οι Φυσικοί ν' αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά το πρόβλημα ***της διάχυσης της θερμότητας, της διάδοσης των κυμάτων, της διάδοσης σήματος, κλπ.,***

Οι Σειρές Fourier, όπως είναι, πλέον, γνωστά, τ' άπειρα αυτά αθροίσματα, έχουν πλήθος εφαρμογών στις **Τηλεπικοινωνίες**, στη **Κβαντική Μηχανική**, στην **Οπτική**, στην **Οικονομετρία**, …

<u>Παράδειγμα</u>: Κάθε πραγματικό αριθμό x, $\quad x \neq \pi + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$,
μπορούμε να τον γράψουμε ως $\quad x = a + 2k\pi, \quad$ όπου $\quad a \in (-\pi,\; \pi)$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = f(a + 2k\pi) = a$$



Αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fourier, ότι σε κάθε σημείο x η f μπορεί να γραφεί ως άπειρο άθροισμα ημιτόνων:

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \;\cdots \right)$$

$$= 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right)$$

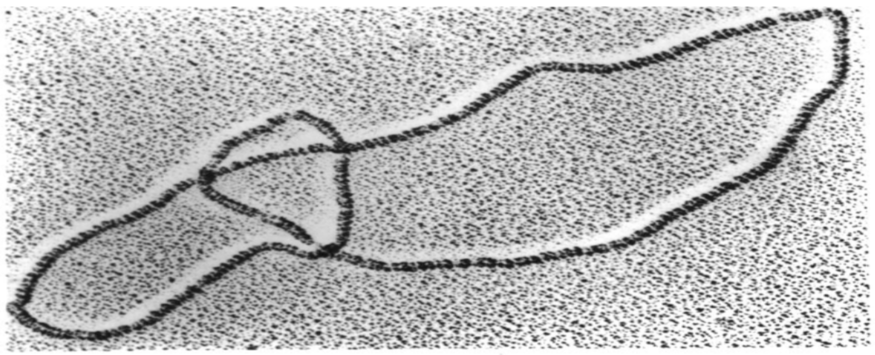
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Periodic_identity_function.gif

Από το DNA στην Τοπολογία!

Όλοι, πλέον, γνωρίζουμε το μόριο του DNA που βρίσκεται μέσα σε κάθε κύτταρο ζωντανού οργανισμού και περιέχει όλες τις γενετικές πληροφορίες που καθορίζουν τη βιολογική ανάπτυξη του κυττάρου και, κατ' επέκταση, όλου του οργανισμού. Επίσης, όλοι γνωρίζουμε τη δομή αυτού του μορίου, τη διπλή έλικα (δύο έλικες που συστρέφονται η μία γύρω από την άλλη):

Μετά την ανακάλυψη των κινούμενων μορίων του DNA (το 1953, από τους Watson και Crick, βραβείο Νόμπελ 1962) , οι επιστήμονες άρχισαν να αναρωτιούνται εάν η ***τοπολογική μορφή*** **του DNA**, δηλαδή η θέση του μέσα στο κύτταρο, έχει επιπτώσεις στην εξέλιξη του κυττάρου.

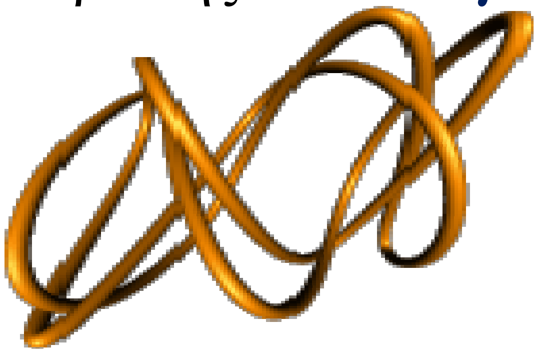
Το 1971 ο βιοχημικός James Wang παρατήρησε ότι κάποια ένζυμα μπορούν να τροποποιήσουν την εικόνα του DNA, να δημιουργήσουν ***«κόμπους»*** ,



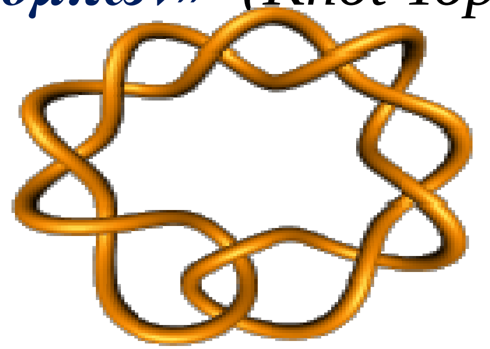
γεγονός που έχει επιπτώσεις στη συμπεριφορά του μορίου του DNA μέσα στο κύτταρο. Χρειαζόμαστε, λοιπόν, τη βοήθεια της ***Τοπολογίας***, ενός κλάδου των Καθαρών Μαθηματικών, γνωστού και ως «*Γεωμετρίας του καουτσούκ*», που μελετά τις ιδιότητες των «αντικειμένων – συνόλων» που μένουν αναλλοίωτες από τις παραμορφώσεις

(http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Mug_and_Torus_morph.gif),

και ειδικότερα της ***«Τοπολογίας των κόμπων»*** *(Knot Topology)*



=



για να μελετήσουμε την τοπολογική συμπεριφορά του DNA και τις επιπτώσεις της στην λειτουργία των κυττάρων!!!

Από τη Θεωρία Αριθμών και την Αλγεβρική Γεωμετρία στη κρυπτογράφηση κι αποκρυπτογράφηση!

Όλοι μας έχουμε κάνει πληρωμές, έχουμε κάνει ανάληψη χρημάτων, κλπ. με την τραπεζική μας κάρτα, και όλοι γνωρίζουμε ότι για να ολοκληρωθεί η διαδικασία πρέπει να εισάγουμε τον κωδικό μας. Ποιος, όμως, από εμάς γνωρίζει ότι πίσω από τους κωδικούς υπάρχει μία ολόκληρη Μαθηματική Θεωρία, *η* ***Θεωρία Κωδίκων*** *και η* ***Κρυπτογραφία,*** κλάδοι των Μαθηματικών που αναπτύχθηκαν τις τελευταίες δεκαετίες, οι οποίοι βασίζονται στη ***Θεωρία Αριθμών*** και στην ***Αλγεβρική Γεωμετρία;***

Η ***Θεωρία Αριθμών***, ένας από τους αρχαιότερους κλάδους των Μαθηματικών, έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των ιδιοτήτων των αριθμών. Το κομμάτι της θεωρίας της που συνδέεται με τους **πρώτους αριθμούς**, δηλ. τους αριθμούς που διαιρούνται μόνο από τον εαυτό τους και τη μονάδα, όπως είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …, και τη γραφή των φυσικών αριθμών ως γινόμενο πρώτων αριθμών, π.χ.

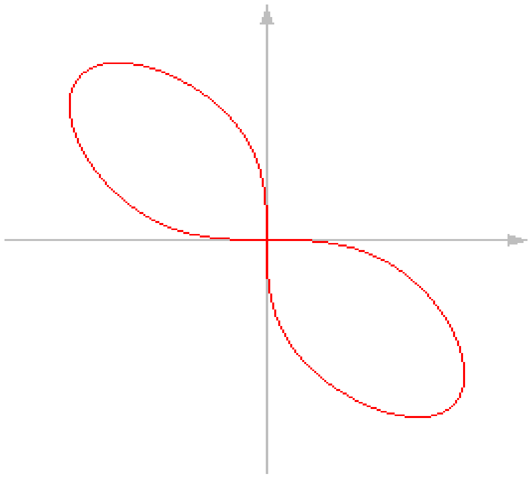
$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17 = 3^2 \cdot 17,$$

είναι αυτό που έχει εξέχουσα θέση στη Θεωρία των Κωδίκων και στη Κρυπτογραφία.

Και μια και μιλάμε για τη Θεωρία Αριθμών, αξίζει ν'αναφέρουμε ότι στο πεδίο έρευνας της Θ.Α. ανήκει το αρχαιότερο, κι ίσως δυσκολότερο, και άλυτο μέχρι σήμερα πρόβλημα περί *της κατανομής των πρώτων αριθμών*:

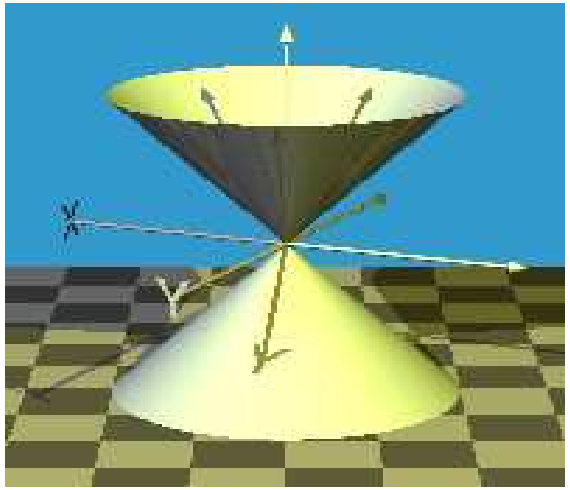
«Δοθέντος ενός φυσικού αριθμού Ν, πόσοι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του Ν υπάρχουν;»

Από την άλλη πλευρά, η ***Αλγεβρική Γεωμετρία*** είναι ο κλάδος των Καθαρών Μαθηματικών που μελετά τις **αριθμητικές ιδιότητες των σημείων που μηδενίζουν μία πολυωνυμική εξίσωση:**



Αλγεβρική καμπύλη

$$x^4 + y^4 + 4xy = 0$$



Αλγεβρική επιφάνεια (κώνος)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

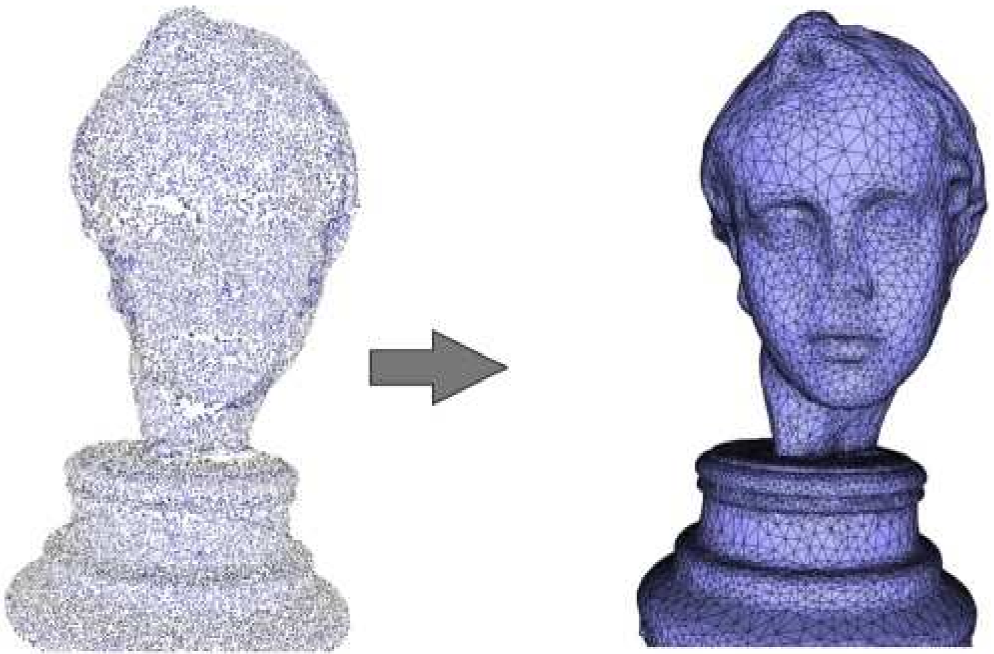
Π.χ., μπορούμε να ***«προσθέτουμε» κατά κάποιο τρόπο*** **σημεία των αλγεβρικών καμπυλών, επιφανειών, και να λαμβάνουμε σημεία πάλι της καμπύλης, της επιφάνειας…** Οι ιδιότητες αυτές μελετούνται από τους ειδικούς και τους βοηθούν να παράγουν νέα κι ασφαλέστερα πρωτόκολλα κρυπτογραφίας!

Ανακατασκευή επιφανειών κι απεικόνισή τους

Θέλουμε να καταλάβουμε το σχήμα μιας επιφάνειας γνωρίζοντας μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων της.

Το παραπάνω πρόβλημα τίθεται σε διάφορα ερευνητικά πεδία: **Στη χαρτογράφηση του πυθμένα της θάλασσας**, στις **γεωλογικές έρευνες**, στην **Αρχαιολογία**, στην **απεικονιστική Ιατρική, …**

Με τη βοήθεια της ***Διαφορικής*** *και* ***Υπολογιστικής Γεωμετρίας*** μπορούμε από **ένα σύννεφο σημείων** (πεπερασμένου πλήθους) της επιφάνειας να κατασκευάσουμε μία **«πιστή» της εικόνα!**



Βάσει αυτής της τεχνικής, απεικονίζουμε τους όγκους που έχουν εντοπισθεί σ’ έναν οργανισμό κι ανάλογα με το σχήμα τους, τους διαχωρίζουμε σε καλοήθεις και κακοήθεις…

Γιατί να σπουδάσουμε Μαθηματικά;

Σπουδές **Μαθηματικών** είναι **μία άριστη επιλογή** για τους/τις μαθητές/μαθήτριες που

- **έχουν το αίσθημα της ανάλυσης και της αφαίρεσης, της μελέτης αφηρημένων εννοιών,**

- **τους/τις αρέσουν οι πνευματικές προκλήσεις, το Μάθημα!**

Αν ανατρέξουμε στην ετυμολογία της λέξεως **«Μαθηματικά»** έχουμε:

Μαθηματικά ↔ Μαθηματικός ↔ Μάθημα ↔ Μανθάνω = Μαθαίνω, αποκτώ γνώσεις με μελέτη.

Τον όρο ***«Μαθηματικά»,*** για ό,τι εννοούμε σήμερα με αυτόν, τον καθιέρωσε, κατά τον Ανατόλιο, η Σχολή του Αριστοτέλη, διότι, όπως υποστήριζαν οι Περιπατητικοί–οι μαθητές του Αριστοτέλη,

«…για να λάβει κάποιος γνώσεις και να εντρυφήσει στα ***Μαθηματικά****, πρέπει να τα διδαχθεί, να παρακολουθήσει* ***Μάθημα****, ενώ τη Ρητορική, την Ποίηση, τη δημώδη Μουσική, μπορεί να τις καταλάβει κάποιος χωρίς να παρακολουθήσει κάποιο Μάθημα…»*

Γιατί να σπουδάσουμε Μαθηματικά;

Σπουδάζοντας **«Μαθηματικά»** μπαίνετε σε έναν τομέα που

- **θα σας βοηθήσει να αναπτύξετε τις πνευματικές σας ικανότητες,**
- **θα σας μάθει την «επιστημονική αυστηρότητα»,**
- **θα σας ανοίξει πόρτες σε νέα, προκλητικά και ποικίλα επαγγέλματα.**

Ζούμε σε έναν κόσμο όπου οι **Θετικές Επιστήμες και οι νέες τεχνολογίες έχουν πρωτεύοντα ρόλο**, και σε μία κοινωνία, την **κοινωνία της πληροφορίας**, που έχουν ανάγκη από **Μαθηματικούς!!!**

Γιατί να σπουδάσουμε Μαθηματικά;

Επίσης, τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο η επιστήμη του μέλλοντος, έχουν ένα λαμπρό παρελθόν και κατέχουν μία κεντρική θέση στην ανάπτυξη του πολιτισμού μας και της φιλοσοφίας!!!

Σπουδάζοντας Μαθηματικά, σπουδάζετε τη σκέψη μεγάλων ονομάτων της παγκόσμιας διανόησης, του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Descartes, του Pascal, του Leibniz, του Laplace, του Euler, του Gauss, του Poincaré, …