

## Θέμα Α

**A1.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο το θεώρημα της σελ. 135 (παράγραφος 2.6 )

**A2.**

**α) Ψευδής**

**β)** Από τη θεωρία του σχολικού βιβλίου (παράγραφος 2.1) γνωρίζουμε πως αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο  $x_0$ .

$$\text{Αντιπαράδειγμα: } f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**A3.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο ορισμός στη σελ. 73 (παράγραφος 1.8)

**A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό**

## Θέμα Β

**B1.** Για να ορίζεται η συνάρτηση  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Επομένως ορίζεται η  $f \circ g$  και είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) \quad \text{για κάθε } x \in (0,1)$$

**B2.** Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0,1)$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} > 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0,1)$  επομένως έχει την ιδιότητα " $1-1$ " άρα η  $h$  είναι αντιστρέψιμη.

Η  $h$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $A = (0,1)$ . Επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$h(A) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ διότι:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) && \frac{x}{1-x} = u \\ &&& x \rightarrow 0^+ \quad u \rightarrow 0^+ \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left( \frac{x}{1-x} \right) && \frac{x}{1-x} = u \\ &&& x \rightarrow 1^- \quad u \rightarrow +\infty \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση  $h^{-1}$  έχει πεδίο ορισμού το  $(-\infty, +\infty)$ .

Για να βρούμε την αντίστροφη της  $h$  θέτουμε:

$$y = h(x) \text{ και λύνουμε ως προς } x$$

Έχουμε:

$$y = h(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln \left( \frac{x}{1-x} \right)$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^y - e^y x = x$$

$$\Leftrightarrow e^y = e^y x + x$$

$$\Leftrightarrow e^y = (e^y + 1)x \text{ και } e^y + 1 > 0, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι:  $h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y + 1}, y \in \mathbb{R}$ .

Θέτω όπου  $y$  το  $x$  οπότε:  $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

**B3.** Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, +\infty)$  ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ .

Η συνάρτηση  $\varphi'$  είναι παραγωγίσιμη ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$  με

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{e^x(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1)e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} = \\ &= \frac{e^x(e^x + 1) - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \\ &= \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Λύνουμε:

$$\begin{aligned}\bullet \quad \varphi''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x) = 0 \\ &\xleftrightarrow{e^x > 0, x \in \mathbb{R}} 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} > 0$$



$$\Leftrightarrow 1 - e^x > 0, \text{ διότι } e^x > 0 \text{ και } (e^x + 1)^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > e^x \xleftrightarrow{e^x \uparrow} x < 0$$

$$\bullet \quad \varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < e^x \xleftrightarrow{e^x \uparrow} x > 0$$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	$\circ$	-
$\varphi(x)$			

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Η  $\varphi''$  μηδενίζεται στο σημείο  $x = 0$  και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Ακόμη ορίζεται η εφαπτομένη της  $C_\varphi$  στο σημείο  $A(0, \varphi(0))$ . Οπότε το σημείο  $A(0, \frac{1}{2})$  είναι σημείο καμπής της  $C_\varphi$ .

**B4.** Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Άρα η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_\varphi$  στο  $-\infty$ .

Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

*D. l. H.*

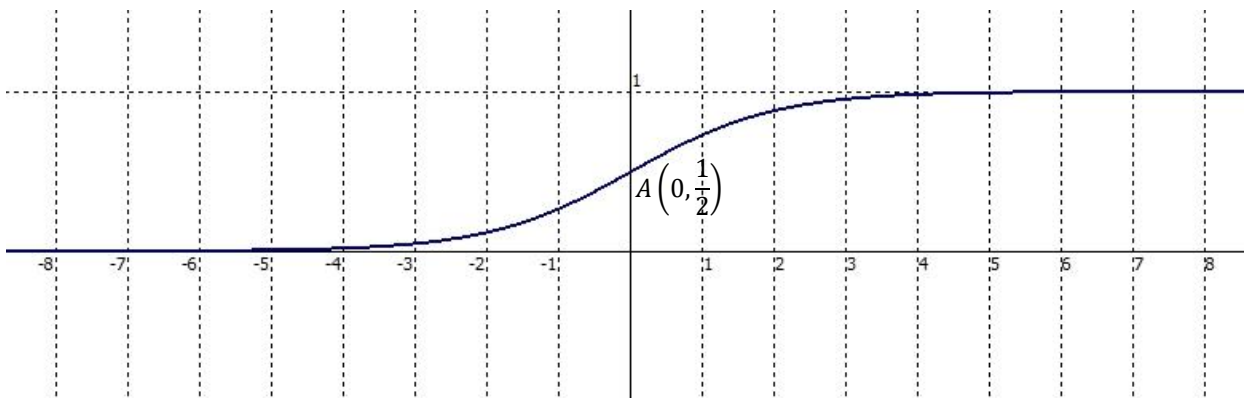
Άρα η ευθεία  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_\varphi$ .

Επιπλέον αφού ισχύει  $\varphi = h^{-1}$ , η  $\varphi$  έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της  $h$  δηλαδή το διάστημα  $(0,1)$ . Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της  $\varphi$  και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+		+
$\varphi''(x)$	+	○	-
$\varphi(x)$			

ΣΚ

Γραφική παράσταση:



## Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, \pi]$  με  $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ .

Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της  $C_f$  που διέρχεται από το  $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ . Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο  $M$  είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0).$$

$$\text{Όμως: } A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \eta\mu x_0 + \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση: } g(x) = \eta\mu x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, \pi]$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu x$$

### α' τρόπος:

Παρατηρούμε ότι:  $g(0) = g(\pi) = 0$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο  $[0, \pi]$ . Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη με:  $g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu x, \quad x \in [0, \pi]$

$$\text{Ισχύει: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi.$$

$$\text{Επίσης: } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων:

$x$	0	$\pi/2$	$\pi$
$g'(x)$	○	○	○
$g$			

Η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  και  $0 \in \Delta_1$ , οπότε η  $g(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\Delta_1$  την  $x_1 = 0$ .

Η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  και  $\pi \in \Delta_2$ , οπότε η  $g(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\Delta_2$  την  $x_2 = \pi$ .

Άρα η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει δύο ακριβώς ρίζες στο  $[0, \pi]$  και συνεπώς προκύπτουν δύο ακριβώς σημεία επαφής  $M$ , δηλαδή δύο ακριβώς εφαπτομένες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  της  $C_f$  που διέρχονται από το σημείο  $A$ .

### β τρόπος:

Παρατηρούμε ότι:  $g(0) = g(\pi) = 0$ , άρα η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο  $[0, \pi]$ . Έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, \pi)$  τρίτη ρίζα της εξίσωσης  $g(x) = 0$ .

Έχουμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στα διαστήματα  $[0, x_0]$  και  $[x_0, \pi]$  και παραγωγίσιμη στα διαστήματα  $(0, x_0)$  και  $(x_0, \pi)$  αντίστοιχα με  $g(0) = g(x_0)$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

και  $g(x_0) = g(\pi)$ . Συνεπώς, με το θεώρημα Rolle υπάρχουν  $\xi_1 \in (0, x_0)$ ,  $\xi_2 \in (x_0, \pi)$  τέτοια ώστε  $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ .

Όμως  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $x = \frac{\pi}{2}$  ή  $x = \pi$ .

Αλλά:  $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$  οπότε καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $(0, \pi)$  την  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Άρα η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει δύο ακριβώς ρίζες στο  $[0, \pi]$  και συνεπώς προκύπτουν δύο ακριβώς σημεία επαφής  $M$ , δηλαδή δύο ακριβώς εφαπτομένες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  της  $C_f$  που διέρχονται από το σημείο  $A$ , οι οποίες είναι:

$$(\varepsilon_1): x - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -x$$

$$(\varepsilon_2): x - f(\pi) = f'(\pi) \cdot (x - \pi) \Leftrightarrow x = x - \pi$$

**Γ2.** Για να βρούμε τα σημεία τομής της  $C_f$  με τον  $x'$  λύνουμε στο  $[0, \pi]$  την εξίσωση:

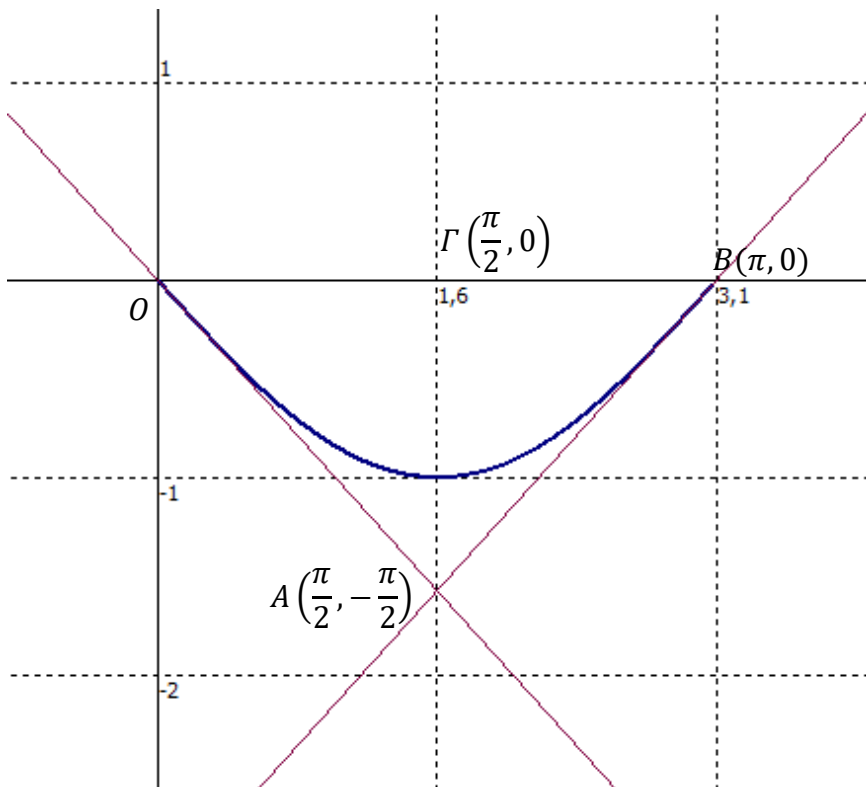
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pi \text{ γιατί } x \in [0, \pi].$$

$$\text{Για κάθε } x \in [0, \pi] \text{ ισχύει } \eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

$$\text{Επομένως, } E_2 = \int_0^\pi |f(x)| dx = -\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = 1+1=2 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Το εμβαδό του τριγώνου } OAB \text{ είναι } E_{OAB} = \frac{(OB)(AG)}{2} = \frac{1}{2} |\pi| \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{Συνεπώς } E_1 = E_{OAB} - E_2 \text{ και τελικά } \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_{OAB} - E_2}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$



Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} \stackrel{D_f = [0, \pi]}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = -\eta\mu x - x + \pi$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, \pi]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, \pi)$  ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  $h'(x) = -\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$  για κάθε  $x \in (0, \pi)$ .

Επειδή η  $h$  είναι συνεχής στο  $x = \pi$ , η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \pi]$ .

Άρα για κάθε  $0 \leq x < \pi \stackrel{h \downarrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\pi) \Leftrightarrow h(x) > 0$ .

Οπότε από τη σχέση (1) το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[ (-\eta\mu x + x) \cdot \frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} \right] = \pi \cdot (+\infty) = +\infty$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (-\eta\mu x - x + \pi) = 0$  και  $-\eta\mu x - x + \pi = h(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (0, \pi)$ .

**β' τρόπος:**

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, \pi]$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, \pi)$  με  $f''(x) = \eta\mu x > 0$  για κάθε  $x \in (0, \pi)$ . Επομένως, η  $f$  είναι κυρτή στο  $[0, \pi]$  και η εφαπτομένη ( $\varepsilon_2$ ) της  $C_f$  βρίσκεται κάτω από την  $C_f$  με εξαίρεση το σημείο επαφής  $B(\pi, 0)$ .

Δηλαδή  $f(x) > x - \pi \Leftrightarrow -\eta\mu x - x + \pi > 0$  για κάθε  $x \in [0, \pi)$ .

**γ' τρόπος:**

Θέτοντας στην (1)  $u = \pi - x$  έχουμε ότι  $u \rightarrow 0^+$  καθώς  $x \rightarrow \pi^-$  και το όριο γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \left[ (\pi - u - \eta\mu(\pi - u)) \cdot \frac{1}{u - \eta\mu(\pi - u)} \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[ (\pi - u - \eta\mu u) \cdot \frac{1}{u - \eta\mu u} \right] = \pi \cdot (+\infty) = +\infty,$$

αφού  $\lim_{u \rightarrow 0^+} (u - \eta\mu u) = 0$  και  $u - \eta\mu u > 0$ , για κάθε  $u \in (0, \pi)$ .

Γ4. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, \pi]$  με  $f''(x) = \eta\mu x \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, \pi]$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$  και  $x = \pi$ .

Επομένως, η  $f$  είναι κυρτή στο  $[0, \pi]$  και η εφαπτομένη ( $\varepsilon_2$ ) της  $C_f$  βρίσκεται κάτω από την  $C_f$  με εξαίρεση το σημείο επαφής  $B(\pi, 0)$ .

Δηλαδή  $f(x) > x - \pi \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$  για κάθε  $x \in (1, e)$ .

$$\text{Άρα } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx = [x - \pi \ln|x|]_1^e = e - \pi - 1 + 0 = e - 1 - \pi$$

## Θέμα Δ

### Δ.1.

- Για την συνέχεια της  $f$  έχουμε:

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0)$  ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, \pi]$  ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \eta \mu x) = 0, \text{ \u0311ρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \text{ και η } f \text{ συνεχ\u03b7\u03c3 στο } 0.$$

Τελικά η  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 συνεχ\u03b7\u03c3 στο  $[-1, \pi]$ .

- Τα κ\u03c1\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b1 σημεί\u03b1 της  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 τα εσωτερικά σημεί\u03b1 του διαστήματος \u0311που η  $f$  δεν \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 παραγωγ\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 \u03b7 ισχύει  $f'(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Η } f \text{ \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 παραγωγ\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 στο } (-1, 0) \text{ με } f'(x) &= (\sqrt[3]{x^4})' = (|x|^{\frac{4}{3}})' = ((-x)^{\frac{4}{3}})' \\ &= \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)' = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0 \end{aligned}$$

Η  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 παραγωγ\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 στο  $(0, \pi)$  με

$$f'(x) = (e^x \eta \mu x)' = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \nu \nu x = e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x)$$

$$\text{και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \nu \nu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = -\sigma \nu \nu x \Leftrightarrow$$

$$\epsilon \varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{(-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -(-x)^{\frac{1}{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

\u038c\u03c1\u03b1 η  $f$  δεν \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 παραγωγ\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 στο  $0$ .

Τελικά τα κ\u03c1\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b1 της  $f$  στο  $[-1, \pi]$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 τα  $x_1 = 0$  και  $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ .



Δ2. Οι ρίζες και το πρόσημο της παραγώγου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$+\infty$
$f'(x)$			-	+	-	
$f(x)$						

Τοπικό Μέγιστο
Ελάχιστο
Μέγιστο
Ελάχιστο

1

0

$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$

0

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα  $[-1, 0]$ ,  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, \frac{3\pi}{4}]$ . Έχει τοπικό μέγιστο για  $x = -1$ , το  $f(-1) = 1$  και για  $x = \frac{3\pi}{4}$  έχει ολικό μέγιστο το  $f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} = M$  και ολικό ελάχιστο για  $x = 0$ , το  $f(0) = 0 = m$  και για  $x = \pi$ , το  $f(\pi) = 0 = m$ .

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (ΘΜΕΤ), η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $[m, M] = [0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}]$ , όπου  $m$  το ελάχιστο και  $M$  το μέγιστο της  $f$ .

Δ3.

$$E = \int_0^{\pi} |f(x) - e^{5x}| dx = \int_0^{\pi} |e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}| dx \quad (1)$$

Ισχύει:  $e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x} = e^x \cdot (\eta\mu x - e^{4x})$

Για κάθε  $x \in [0, \pi]$  είναι:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 1 \geq \eta\mu x \text{ και άρα } \eta\mu x - e^{4x} \leq 0.$$

Η (1) γίνεται:

$$E = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^x \cdot \eta\mu x) dx =$$

$$\int_0^{\pi} e^{5x} dx - \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x dx = I_1 - I_2$$

Για το ολοκλήρωμα  $I_1$  έχουμε

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{5x} dx = \left[ \frac{1}{5} \cdot e^{5x} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5}$$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Για το ολοκλήρωμα  $I_2$  έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x \, dx = \int_0^\pi (e^x)' \cdot \eta\mu x \, dx = [e^x \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \\ &= - \int_0^\pi e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = - \int_0^\pi (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = -[e^x \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x \, dx \\ &= -(-e^\pi - 1) - I_2 \Leftrightarrow \\ 2 \cdot I_2 &= e^\pi + 1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^\pi + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E = I_1 - I_2 = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2}$$

Δ4. Είναι:

$$16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}, \quad x \in [-1, \pi]$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = f(x) - M \leq 0$$

$$\text{Άρα } \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Επιμέλεια:

Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής,  
Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης  
Κότσιρας, Γιάννης Αλεξόπουλος, Ιάσοντας Μαρκάκης, Ηρώ Μαρκάκη

**Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!**



Για την εύστοχη Συμπλήρωση του Μηχανογραφικού Δελτίου συμβουλευτείτε τη νέα έκδοση του Οδηγού Σπουδών: «ΣΠΟΥΔΕΣ & ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΑ 2017».

Όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τις Σχολές, τις Σπουδές και τα Επαγγέλματα!

Περισσότερες πληροφορίες στην ιστοσελίδα του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ: [www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)

Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999  
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)