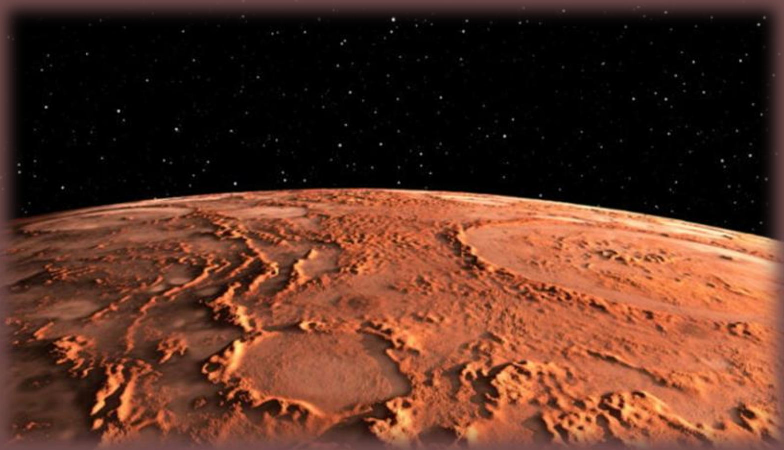
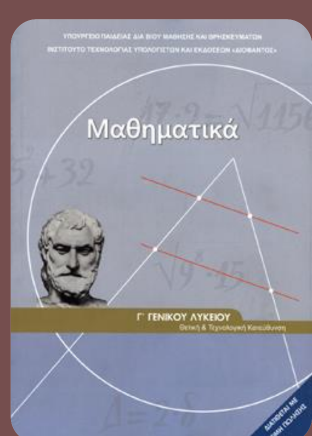


ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΡΙΤΗ

6 Ιουνίου 2023



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

1η έκδοση

Αντωνόπουλος Νίκος

Βελαώρας Γιάννης

Βοσκάκης Σήφης

Γκριμπαβιώτης Πάνος

Μανώλης Ανδρέας

Ποδηματάς Θωμάς

Χασάπης Γιώργος

Συντονισμός

Βελαώρας Γιάννης

Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς
των μελών της **lisari team**

1η έκδοση: 6 – 6 – 2023 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό ιστότοπο

lisari.blogspot.com

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι απαντήσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2023 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των απαντήσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις.
Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisariteam

6 Ιουνίου 2023

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3ο ΓΕΛ Άργους)

2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)

3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)

4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)

5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)

6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)

7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)

8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)

9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)

10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)

11. Κανάβης Χρήστος (6ο ΓΕΛ Αιγάλεω)

12. Κατζιώτη Χαρά (2ο Γυμνάσιο Πρέβεζας)

13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)

14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)

15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)

16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Εξαπλατάνου)

17. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)

18. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)

19. Μπαδέμης Δημήτρης (Καθηγητής μαθηματικών στην Ιδιωτική Εκπαίδευση)

20. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)

21. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)

22. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)

23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")

24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)

25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)

26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)

27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)

28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)

29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής)

30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)

31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)

32. Τάσος Νίκος (Σύμβουλος Ι.Ε.Π.)

33. Τσακαλάκος Τάκης (Συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)

34. Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)

35. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)

36. Χατζόπουλος Μάκης (ΓΕΛ Φιλοθέης)

lisari team / Σχολικό έτος 2022 – 23

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ.111)

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις **f, g** είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ.104)

Η **f** είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

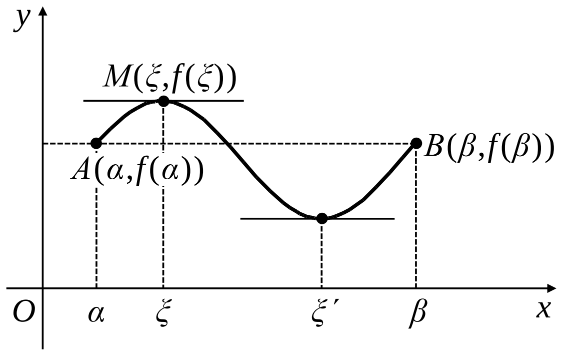
Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 128)

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$



Γεωμετρική ερμηνεία

Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει **ένα, τουλάχιστον**, σημείο $M(\xi,f(\xi))$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α4. α) **Λ** β) **Λ** γ) **Λ** δ) **Σ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $g \circ h$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα $D_{g\circ h} = (0, +\infty)$

Ο τύπος της είναι:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2. i) Είναι $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x} = \dfrac{4}{x} - x,\ x > 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii) Είναι:

$$\pi > e \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow e(4 - \pi^2) < \pi(4 - e^2) \overset{4 - e^2 < 0}{\Leftrightarrow} \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

Β3. Για κατακόρυφη ασύμπτωτη ψάχνουμε στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot (4 - x^2) \right] = +\infty$$

Γιατί $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} (4 - x^2) = 4 > 0$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Πλάγια Ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = -1 = \lambda$$

$$\text{και } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4 - x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4 - x^2 + x^2}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x} \right) = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι Πλάγια Ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β4. Έχουμε $\left| \sigma\upsilon\nu(x^2 + 1) \right| \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έτσι $\left| \dfrac{\sigma\upsilon\nu(x^2 + 1)}{f(x)} \right| \le \dfrac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|f(x)|} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu(x^2 + 1)}{f(x)} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$ γιατί $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$

Και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{|f(x)|} \right) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει

$$\int_2^3 xf(x)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3(1+\alpha x)dx=1\Leftrightarrow[x]_2^3+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow$$

$$1+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow\alpha\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

Γ2. i) Είναι

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=-1$$

και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x}=-1$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.
Συνεπώς ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$$

Αν είναι ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ ισχύει

$\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=\dfrac{3\pi}{4}$ (αφού $0\le\omega<180^o$)

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-3<0$
(αφού $x<1\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow 2x-3<-1$)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$

Και $f'(1)=-1$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) και ισχύει $f'(x)<0$ στο $\mathbb{R}$.

Τότε η f είναι 1 – 1 (ως γνησίως μονότονη)
Αφού f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το
$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

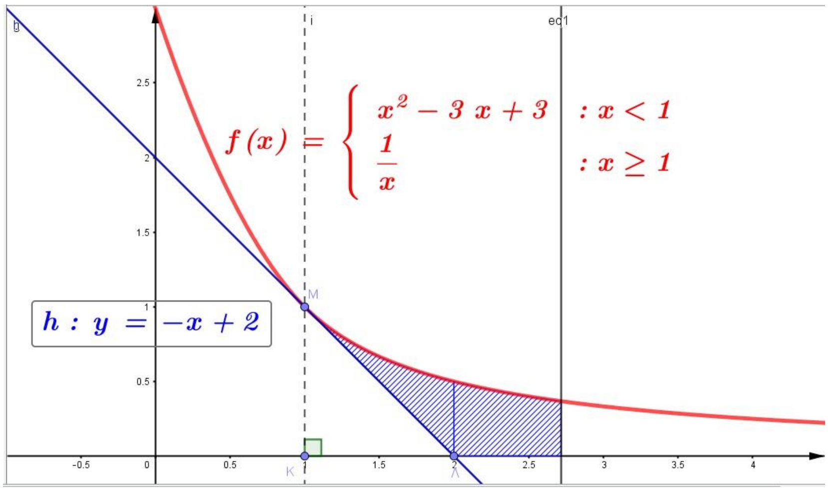
Και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Γ4. Η $\varepsilon: y=-x+2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Lambda(2,0)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(1,1)$.



<u>1ος τρόπος</u>

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(K\Lambda M)=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{(K\Lambda)\cdot(KM)}{2}=[\ln x]_1^e-\frac{1}{2}=1-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ τ. μον.}$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$E(\Omega)=\int_1^2 (f(x)-y)dx+\int_2^e f(x)dx$$

Όμως $\displaystyle\int_1^2 (f(x)-y)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\ln 2+2-4-\left(0+\frac{1}{2}-2\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$

$$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e \frac{1}{x}dx=[\ln x]_2^e=1-\ln 2$$

Επομένως

$$E(\Omega)=\ln 2-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}\text{ τ. μον.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\quad \text{για κάθε } x\in(0,1)\cup(1,2).$$

Η f είναι συνεχής στο D_f άρα

Είναι $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to1}(g(x)\cdot(x-1))=\ell\cdot 0=0.$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-2x\right)=\ln(2-1)-1+\kappa-2=\kappa-3.$

$\kappa-3=0\Rightarrow\kappa=3$

Δ2. Έχουμε για κάθε $x\in(0,2)$

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

Είναι

$$f'(x)=0\overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow}x=1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 1<x<2$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(0,1]$ οπότε $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(2-x)=\ln 2\ \text{ και }\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

και

$$f(1)=2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=(1,2)$ οπότε

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to 2^-}f(x),\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\right)=(-\infty,2)$

διότι

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)\underset{2-x>0}{\overset{u=2-x}{=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=2$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$0\in f(A_1)$ και η f γνησίως αύξουσα στο A_1 οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

και

$0\in f(A_2)$ και η f γνησίως φθίνουσα στο A_2 οπότε υπάρχει $x_2\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$

Θα αποδείξουμε ότι $x_1<\frac{1}{3}$

1ος τρόπος

Είναι

$$0<x_1<\frac{1}{3}\underset{x\in(0,1)}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x_1)<f\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow 0<\ln\frac{5}{3}\ \text{το οποίο ισχύει.}$$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι

$$f(x_1)=0\Leftrightarrow \ln(2-x_1)+3-\frac{1}{x_1}=0\Leftrightarrow \ln(2-x_1)=\frac{1}{x_1}-3$$

Το $\ln(2-x_1)>0$ διότι $0<x_1<1\Leftrightarrow -1<-x_1<0\Leftrightarrow 1<2-x_1<2$

Οπότε $\frac{1}{x_1}-3>0\Leftrightarrow x_1<\frac{1}{3}$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επίσης

$$f''(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^3}<0$$

Τελικά η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Δ4 i)

Αφού F αρχική της f θα είναι $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$ και όμοια, αφού G αρχική της f, άρα $G'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε :

$F'(x)=G'(x)\Leftrightarrow F(x)=G(x)+c$, για κάθε $x\in(0,2)$ (1)

Από (1) για $x=x_1$: $F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow G(x_1)+c=0\Leftrightarrow G(x_1)=-c$ (2)

Από (1) για $x=x_2$: $F(x_2)=G(x_2)+c\Leftrightarrow F(x_2)=c$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) :

$F(x_2)+G(x_1)=0$

ii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in[x_1,x_2]$

Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών

$$\Phi(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=-x_2F(x_2)+x_1-x_2 \quad (4)$$

$$\Phi(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1 \quad (5)$$

Είναι $0<x_1<x_2<2$ άρα $x_1-x_2<0$ και $x_2-x_1>0$. Ακόμη :

$F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ γιατί :

Στο $[x_1,1]$ είναι f ↗ οπότε για κάθε x : $x_1<x<1\Rightarrow 0=f(x_1)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$

Στο $[1,x_2]$ είναι f ↘ οπότε για κάθε x : $1<x<x_2\Rightarrow f(x)>f(x_2)=0\Rightarrow f(x)>0$

Τελικά $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ και αφού F συνεχής στο $[x_1,x_2]$ θα είναι F ↗ στο $[x_1,x_2]$, οπότε :

$x_1<x_2\overset{F\nearrow}{\Rightarrow}F(x_1)<F(x_2)\Rightarrow 0<F(x_2)$

Συνεπώς :

$$(4):\ \Phi(x_1)=\underset{<0}{-x_2}\,\underset{>0}{F(x_2)}+\underbrace{x_1-x_2}_{<0}<0$$

$$(5):\ \Phi(x_2)=\underset{>0}{x_1}\,\underset{>0}{F(x_2)}+\underbrace{x_2-x_1}_{>0}>0$$

Άρα η συνάρτηση Φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi)=0$, όπως θέλαμε.

Ακόμη, είναι

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 \\ &= x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0\end{aligned}$$

γιατί όπως είδαμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

Έτσι, η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$, οπότε και '$1-1$' , άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.